Cuadernos de Ecònomía Vol. 13. 491-526. 1985.

Teoría financiera: Aversión al riesgo en un modelo dinámico.

Martí Oliva Fures

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n – 08034 Barcelona

Teoría financiera: Aversión al riesgo en un modelo dinámico.

RESUMEN

El objetivo de este estudio estriba en caracterizar las secuencias de precios y tipos de interés de equilibrio, asociados a los distintos activos que se negocian en una economía de aversos al riesgo, donde existe un Mercado de Capitales, un Mercado de Emisión de títulos de deuda –Mercado Primario– y un Mercado Secundario en el que se negocian bonos a distintos plazos. La estructura a plazo de los tipos de interés surge como un resultado endógeno, en un marco dinámico, bajo incertidumbre; se demuestra que las primas por plazo existen, son v.a. antes de devenir realizaciones, y positivas y crecientes con el plazo. Se prueba que el Mercado de Capitales no será un "Mercado Eficiente": a pesar del supuesto de Expectativas Racionales, precios de acciones, ajustados por dividendos, serán, en cierta medida, predecibles. Con respecto a las interrelaciones que mantendrán en equilibrio precios de acciones con tipos de interés sobre bonos, se alcanza, utilizando procesos estocásticos de parámetro discreto, un resultado básico de la moderna Teoría Financiera: el riesgo de cualquier activo se tiene que considerar en relación a la covariabilidad de su rendimiento con la utilidad marginal del consumo. La "beta" de la Teoría de la Cartera y Mercado de Capitales de Sharpe-Lintner-Mossin pierde sentido en un contexto dinámico, una vez se admite que los inversores tienen un horizonte de planeación que se extiende más allá de un período. El parámetro relevante para preciar cualquier activo arriesgado deviene la "beta-consumo", que tiene en cuenta la medida apropiada del riesgo que comporta la tenencia de un título, que proporcionará un pago incierto a su tenedor al vencimiento, en un marco intertemporal. Todas las proposiciones seguirán siendo válidas incluso ante la presencia de activos no negociables o imperfectamente negociables –vg.: sujetos a costes de transacción significativos– en el sistema.

Finances Theory: Risk Aversion in a Dynamic Model.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to characterize the price's and interest's rates of equilibrium sequences, related with the different assets that are traded in an economy of risk-averse consumers, where there is a Capital Market, a Bond Market (Primary Market) and a Secondary Market where bonds with different maturity are negotiated. The term structure of interest rates is an endogenous result, in a dynamic frame show with uncertainty. I that there are term premiums and that they are r.v. before become actuals, and positive and growing with the term to maturity. I prove that the Capital Market won't be an "Efficient Market": notwithstanding the assumption of Rational Expectations, share's prices, adjusted for dividens, will be, to certain extent, forecastable. With regard to the interrelations that will maintain in equilibrium share's prices with bond's interest rates, I achieve, using stochastic processes of discrete parameter, a basic result of Modern Finance Theory: the risk of any asset need to be considered in relation to the covariability of its yield with the marginal utility of consumption. The Portfolio Theory and Capital Markets's "Beta", of Sharpe-Lintner-Mossin, loses meaning in a dynamic context, when it is admited that the investors have a planning horizon longer than a period. The relevant parameter for pricing any asset becomes the "Consumption-Beta", which takes into account the appropiated measure of the risk for having an asset, that will provide an uncertain payment to his holder at its maturity, in a dynamic frame. All the propositions reamin still valid, even if there are assets non-traded or imperfectly traded (subject to significative transaction cost) in the system.

Teoría financiera: Aversión al riesgo en un modelo dinámico.*

7. PRECIOS Y TIPOS DE INTERES DE EQUILIBRIO

7.1. *El problema de optimización dinámica*

En la economía de referencia, precios de acciones, de bonos en el MP y tipos de interés –a distintos plazos– en el MS, se determinan exclusivamente a partir de la acción conjunta de los consumidores, en los distintos mercados que tienen abiertos en el sistema, dado su patrimonio inicial de unidades del bien Q y una "fuente" del bien Ç –imperfectamente negociable–: son endógenas al sistema. Las variables exógenas son los tipos de rendimiento en el MC, los tipos de interés en el MP y los ingresos por venta de servicios. Pero todas las variables anteriores toman valor fuera de la acción del consumidor individual –las toma como datos al resolver su programa intertemporal–; las denominaremos "variables de estado", siguiendo la terminología de Teoría de Control Optimo (Bensoussan et al., 74, c. 2). En el problema que enfrenta m en cada uno de los sucesivos períodos a lo largo de su vida, tiene abiertas posibilidades de actuación mediante las secuencias de variables: flujos de consumo, número de acciones de la empresa $j \in J$ a mantener y número de u.c. colocadas en bonos con $s + 1$ vencimientos posibles; son sus variables de control. Con m en t y $h = t+k$:

– –Variables de estado: $\left\{ y_h, p_h^1, \ldots, p_h^J, d_h^1, \ldots, d_h^J, w_{h+1,h}, \ldots, \ldots, w_{h+s+1,h} \right\}_{k=0}^{\infty}$ donde se ha tenido en cuenta que es equivalente hablar de tipos de rendimiento en el MC que de precios y precios más "dividendos netos" en el período siguiente y que realizado $w_{h+s+1,h}$, b_{h+s+1} –y u_h– devienen un dato.

– –Variables de control: $\left\{ c_h, z_h^1, \ldots, z_h^J, v_{h,h+1}, \ldots v_{h,h+s+1} \right\}_{k=0}^{\infty}$

* La primera parte de este trabajo se publicó en el número anterior de Cuadernos de Economía. La notación aquí utilizada sigue a la presentada en dicho número.

Considerando a m situado en el momento t, la secuencia de restricciones presupuestarias (33) contienen v.a. para $k > 0$; tales restricciones deben ser satisfechas estríctamente para cada posible conjunto de valores que esas v.a. puedan tomar. Las variables de control se tienen que considerar como funciones de las citadas v.a. Esas funciones –variables de control– son reglas de decisión. Una regla de decisión especifica el valor de una decisión "para cada conjunto de circunstancias que puedan surgir en el momento en que la decisión se tenga para llevar a la práctica" (Long, 72). En h, las variables de control o reglas de decisión, deben depender de las v.a. que aparecen en la restricción presupuestaria del período h o de valores de las v.a. previos a h –secuencias de precios y dividendos de acciones, tipos de interés sobre bonos e ingresos por venta de servicios–, pero no pueden depender de los valores que tomen las v.a. posteriormente a h, pues se ha supuesto que el consumidor actuaba bajo incertidumbre. Las variables de control que dependen sólo de la información, I_h, disponible en el momento en que la decisión se tiene que llevar a la práctica, se denominan "Reglas Admisibles" (Long, 72, p. 154). Es decir, las reglas de decisión admisibles para el período h, serán funciones de todas las v.a. –variables que se determinan de forma exógena al consumidor individual– cuyos valores son especificados por I_h.[23] Sea D_h el conjunto de reglas de decisión admisibles para el período h; entonces:

(39)
$$\left\{c_h ; z_h^j,\ j= 1, \ldots, J; v_{h,h+i}, i= 1, \ldots s+1\right\} \in D_h ; h= t+k; k= 0, 1, \ldots$$

La resolución, mediante las variables de control, del programa dinámico que afronta el consumidor, originará una estrategia óptima de consumo–inversión para el sujeto, para todos los período futuros de su vida. Una estrategia óptima de consumo-inversión proporcionará los precios de acciones y los tipos de interés sobre bonos –a los distintos plazos posibles– para los cuáles la secuencia de decisiones de consumo–inversión que prescribe es óptima. En suma, cada período, m, al resolver su problema de optimización dinámica, toma como dados los valores de las variables de estado; ello conduce a formular las reglas de decisión óptimas en h, como funciones de las variables de estado cuyos valores son especificados por I_h.

El problema que encara el consumidor, m, que empieza su actividad en el momento t, consiste en encontrar una solución factible, X_t,

23. Un problema de control óptimo difiere de uno de optimización restringida de una función de varias variables en que "aquí maximizamos con respecto a reglas de decisión en vez de variables de decisión" (Long, 72, p. 155).

que maximice el valor de su función objetivo, V_t, para un conjunto dado de precios de acciones y tipos de interés sobre bonos sin riesgo de falta de pago. Una solución factible se definirá como un conjunto de reglas de consumo e inversión admisibles que satisfacen la restricción presupuestaria con probabilidad uno (Long, 72, p. 155).

El consumidor encara un problema del mismo tipo en cada uno de los futuros períodos de su vida, t+j, j= 1, 2, . . Es decir, para cada punto del tiempo t:

(40) $$\max_{c_{t+k}, X_{t+k} \in D_{t+k}} V_t = E_t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot U(c_{t+k}) \right)$$, Sujeto a:

(41) $c_h = y_h + X_{h-1} \cdot G_h - X_h \cdot P_h \quad ; \quad h = t+k \;, \quad k = 0, 1, ..$

(Restricción Presupuestaria)

(42) $$X_{t-1} = \bar{X}_{t-1} \quad \text{dado}$$

(Patrimonio inicial –en t– de activos perfectamente negociables)

Con (reescribiendo en forma vectorial las variables de decisión y de estado)

(43)
$$X_{t+k-1} = (z^1_{t+k-1}, \ldots z^J_{t+k-1}, v_{t+k-1,\, t+k}, \ldots, v_{t+k-1, t+k+s})'$$

(44) $$X_{t+k} = (z^1_{t+k}, \ldots, z^J_{t+k}, v_{t+\, t+k+1}, \ldots, v_{t+k,\, t+k+s+1})'$$

(45)
$$G_{t+k} = (p^j_{t+k} + d^j_{t+k}, j = 1, ..J;\ 1, w_{t+k+1,\, t+k}, \ldots, w_{t+k+s,\, t+k})$$

(46)
$$P_{t+k} = (p^j_t, j = 1, ..J;\ w_{t+k+1,\, t+k}, .. w_{t+k+s,\, t+k}, w_{t+k+s+1,\, t+k})$$

La estructura del problema hace apropiado para su resolución el uso de cálculo de variaciones estocástico en tiempo discreto, siguiendo a Sargent (79, p. 333–93).

La restricción presupuestaria (41) se ha escrito de forma que la regla de decisión que determina el consumo para el período h aparece como función de las decisiones de inversión realizadas en h y h−1. Como la sustitución de reglas de inversión admisibles en las restricciones presupuestarias originará reglas de consumo admisibles (Long, 72, p. 156), se pueden sustituir las restricciones en la función de utilidad y proceder a la maximización de la función objetivo (Sargent, 79, p. 372; Malliaris & Brock, 82, p. 189).

(47)

$$\max_{X_h \in D_h} V_t = E_t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k . U(y_h + X_{h-1} . G_h - X_h . P_h) \right), \forall t \in T.$$

El problema del consumidor en t deviene en dar un valor a la variable X_t y diseñar una estrategia para determinar X_{t+1}, X_{t+2}, . . como funciones de la información que sabe que tendrá disponible en el futuro (Sargent, 79, p. 334). Al proceder a la maximización (47), el decisor elige, simultáneamente, X_t y una secuencia de funciones X_{t+1} (.), X_{t+2} (.), . . , de forma que se verifique: $X_{t+1} = \hat{X}_{t+1}(I_{t+1})$, $X_{t+2} = \hat{X}_{t+2}(I_{t+2})$. . . "Estas funciones dan un plan de contingencia completo para determinar los valores futuros de $\{X_{t+k}\}_{k=1}^{\infty}$ basados en la información que será disponible cuando X_{t+k} deba tomar valor" (Sargent, 79, p. 334). "Una forma rigurosa de tratar el problema" de consumo–inversión con período de planeación infinito "sería enfrentar primero el problema con horizonte finito. . . y, seguidamente, tomar el límite para ir a uno infinito" (Ziemba & Wickson, 76, p. 435–6):

(48)

$$\max V_t^T = E_t \left(\sum_{k=0}^{T} a^k . U(y_h + X_{h-1} . G_h - X_h . P_h) \right), \text{ sujeto a}$$

(49)

$$X_{t-1} = \bar{X}_{t-1}$$

Para que una secuencia $\{X_h\}_{k=0}^{T}$ maximice (48) debe satisfacer (Sargent, 79, p. 196–7):

(50)

$$-U'_h . P_h + a . E_h (U'_{h+1} . G_{h+1}) = 0_{(J+s+1)}, \quad h = t+k, \ k = 0, 1, . . , T-1$$

donde $U'_h = \partial U(c_h)/\partial c_h$ evaluada en el óptimo de las variables de decisión.

(51)
$$a^T \cdot E_t(-U'_{t+T} \cdot P_{t+T}) = 0_{(J+s+1)}$$

Para el problema con horizonte infinito, la condición de transversalidad –que con (49) constituyen las condiciones de contorno necesarias para un óptimo– será:

(52)
$$\lim_{T \to \infty} a^T \cdot E_t(-U'_{t+T} \cdot P_{t+T}) = 0_{(J+s+1)}$$ [24]

(52) y el sistema de ecuaciones de Euler estocásticas (50) para:

(53)
$$k = 0, 1, \ldots \infty$$

son condiciones necesarias para un óptimo al problema dinámico que afronta el consumidor de la economía de referencia. De (43) – (46), y de (50), se deduce que las condiciones necesarias para un óptimo incluyen:

(54)
$$-U'_h \cdot p^j_h + a \cdot E_h(U'_{h+1} \cdot (p^j_{h+1} + d^j_{h+1})) = 0;$$
$$h = t+k;\ j = 1, \ldots J;\ k = 0, 1, \ldots$$

(55)
$$-U'_h \cdot w_{h+i,\,h} + a \cdot E_h(U'_{h+1} \cdot w_{h+i,\,h+1}) = 0;$$
$$h = t + k;\ i = 1, \ldots s + 1;\ k = 0, 1, \ldots$$

Las condiciones de transversalidad, de (43)–(46) y (51)–(53):

24. Para que la condición de transversalidad se mantenga, bastará con que P_h sean de orden exponencial menor a 1/a: $\left| a^T \cdot E_t(U'_{t+T} \cdot P_{t+T}) \right| = a^T \cdot E_t(U'_{t+T} \cdot \left| P_{t+T} \right|)$; $E_t(a^T \cdot U'_{t+T} \cdot K(x)^{t+T} = E_t(K \cdot U'_{t+T} \cdot x^t \cdot (a \cdot x)^T)$. Entonces, como $(a \cdot x) < 1$, para $T \to \infty$, cada uno de los componentes de la expresión anterior se anula: ello prueba que la condición de que cada uno de los procesos componentes del vector P_h, $h = t + k$, sea de orden exponencial menor que 1/a basta para que (52) se satisfaga (Sargent, 79, p. 196–7). Se denominan secuencias de orden exponencial menor que 1/a, a series que satisfacen: $\left| E_t(P_h) \right| < K(x)^h$, con $K > 0$ y $1 \leqslant x < 1/a$, para todo t, $h = t + k$, y para $k \geqslant 0$ (Sargent, 79, p. 334-5).

$$(56) \qquad \lim_{T \to \infty} a^T . E_t(-U'_{t+T} \cdot p^j_{t+T}) = 0; \qquad j = 1, 2, .. J$$

$$(57) \qquad \lim_{T \to \infty} a^T (-U'_{t+T} \cdot w_{t+T+i,\, t+T}) = 0; \qquad i = 1, 2, .. s + 1$$

7.2. *Equilibrio*

(54)–(57) son condiciones necesarias para la optimalidad de la estrategia de consumo-inversión del consumidor representativo de la economía de referencia. Denotan, en forma implícita, las funciones de exceso de demanda de los distintos títulos existentes en el sistema por parte de m. Sustituyendo en (54)–(57) las secuencias de consumo de equilibrio –implicadas por el supuesto de consumidores idénticos–, (34) se obtendrán las series de equilibrio de precios de acciones y tipos de interés –o factores de descuento– sobre bonos. El equilibrio se denomina de expectativas racionales porque se supone que los consumidores forman sus previsiones de los valores futuros de las v.a. que aparecen en (54)–(57), tomando esperanzas matemáticas condicionales con respecto a los procesos estocásticos que gobiernan realmente la evolución de las variables de estado del sistema (precios y dividendos de acciones, tipos de interés sobre bonos e ingresos por venta de servicios). Siguiendo a Sargent (79, p. 343) podemos decir que un equilibrio será un par de vectores de procesos estocásticos (p. d, w, y)', (z, v)', que satisfacen las dos condiciones de equilibrio siguientes:

–Dada la estrategia óptima –proceso estocástico– del consumidor representativo para dar valor a (z, v)', el vector de procesos estocásticos (p, d, w, y)' equilibra los mercados de Capitales, Primario, Secundario y del bien Q.

–Cuando el consumidor representativo enfrenta el vector de procesos estocásticos (p, d, w, y)' como un precio–aceptante, el vector de procesos estocásticos (z, v)' maximiza el funcional de utilidad esperada.

En lo sucesivo consideraremos que nos referimos a valores de equilibrio de las variables, para lo cual, dados los supuestos efectuados para diseñar la economía de referencia, es suficiente con resaltar:

$$(58) \qquad c_h = c^*_h = y_h + \sum_{j=1}^{j} d^j_h, \quad h = t + k, \quad k = 0, 1, 2, ..$$

7.3. *Los mercados primario y secundario de bonos. Análisis.*

A partir de las condiciones de optimalidad (55), teniendo en cuenta que $w_{h+i,\ h+i} = 1$ y por las propiedades de las Esperanzas Matemáticas Condicionales (Shiller, 78; Sargent, 79, c. 10), se obtiene:

(59) $$U'_h \cdot w_{h+i,\ h} = a^i \cdot E_h\ (U'_{h+i} \cdot w_{h+i,\ h+i}) = a^i \cdot E_h (U'_{h+i})$$

$$i = 1, 2, \ldots s+1 \quad ; \quad h = t+k \; ; \quad k = 0, 1, \ldots$$

En h, dado I_h, m tiene la oportunidad, mediante la utilización de los mercados Primario y Secundario de Bonos, de cambiar una unidad de consumo en el período d por $(1/w_{h+i,\ h})$ u.c. en el período h + i. (59) iguala su relación marginal de sustitución de incrementos sin riesgo de consumo en h + i por consumo en h con $(1+r_{h+i,\ h})$, la tasa de cambio, fijada en h en el mercado de bonos correspondiente a tal efecto.

$\left\{ w_{h+i,\ h} \right\}_{i=1}^{s+1}$ define la estructura a plazo de los tipos de interés, introducida en 3.

Notemos que de (59):

(60) $U'_{h+1} \cdot w_{h+2,\ h+1} = a \cdot E_{h+1}(U'_{h+2})$, y por la definición de factor de descuento:

(61) $U'_{h+1} = a \cdot (1+r_{h+2,\ h+1}) \cdot E_{h+1}(U'_{h+2})$, donde $r_{h+2,\ h+1}$ es el tipo de interés existente en el Mercado Secundario de Bonos –de Préstamos entre consumidores– en el período h+1, para títulos sin riesgo con vencimiento en el período siguiente h + 2. De (59) y (61):

(62) $U'_h \cdot w_{h+1,\ h} = a \cdot E_h(U'_{h+1}) = a^2 \cdot E_h\ ((1+r_{h+2,\ h,\ 1}) \cdot U'_{h+2})$; de (59):

(63) $U'_h \cdot w_{h+2,h} = a^2 \cdot E_h(U'_{h+2})$, dividiendo miembro a miembro (62) por (63) y teniendo en cuenta la definición de tipos forward (18):

(18) $$f_{h+i,\,h} = ((1+r_{h+i,\,h})/(1+r_{h+i+1,\,h})) - 1 =$$

$$= (w_{h+i+1,\,h}/w_{h+i,\,h}) - 1$$

$$i = 2, 3, \ldots s+1 \;\; ; \;\; f_{h+1,\,h} = r_{h+1,\,h}$$

se obtiene, una ayuda de la definición de covarianza, Cov(x, y) = = E(x.y) – E(x). E(y):

(64) $$f_{h+2,\,h} = -1 + \frac{E_h\,((1+r_{h+2,\,h+1}).\;U'_{h+2})}{E_h\,(U'_{h+2})} =$$

$$= E_h\,(r_{h+2,\,h+1}) + \xi_{h+2,\,h}$$

(65) $$\xi_{h+2,\,h} = (Cov_h\,(r_{h+2,\,h+1},\, U'_{h+2}))\,/\,E_h(U'_{h+2})$$

Extendiendo los resultados anteriores a los tipos de interés vigentes en h para préstamos entre h + i –1 y h+i, i = 2, 3, . . s+1:

(66) $$f_{h+i,\,h} = E_h(r_{h+i,\,h+i-1}) + \xi_{h+i,\,h}$$

(67) $$\xi_{h+i,\,h} = \frac{Cov_h\,(r_{h+i,\,h+i-1},\, U'_{h+i})}{E_h\,(U'_{h+i})}$$

$$i = 2, 3, \ldots s+1 \;\; ; \qquad h = t+k, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

$\xi_{h+i,\,h}$ es la prima por plazo para préstamos a i períodos a partir del período h. Prefiero la denominación de primas por plazo a la "clásica" de primas a la liquidez, pues como se verá su existencia viene explicada a partir de consideraciones de aversión al riesgo. De (66)–(67) se observa que la tasa forward sobre determinado período futuro –el que transcurre entre h + i – 1 y h + i– no será igual a la tasa esperada spot en h para el mismo período, salvo si la prima por plazo correspondiente es 0. Ello impone que el término de covarianza que aparece en (67) sea nulo.

Pero en este momento, bajo los supuestos con que se ha modelizado el conjunto de información, $I_h \supset I_{h-1}$ se puede afirmar:

1. La prima por plazo para cada uno de los vencimientos futuros en h, $\forall h$, es antes de h una v.a., cociente de dos v.a. Por consiguiente, todos los estudios que suponen su constancia en cada período h para cada uno de los plazos $h+i$, $i = 2, 3, \ldots s+1$, cometen ya un error de partida.

La información que m tiene en h−1 es distinta de la que posee en h; en consecuencia, variarán las estimaciones de las variables de interés que los sujetos realicen cada período para cada uno de los momentos siguientes. De otro modo, el término de covarianza que aparece en (67) es condicional a la información disponible y se ha postulado $I_h \supset I_{h-1}$, $\forall h$. Ello es una crítica a la mayoría de trabajos emprendidos en el ámbito de la estructura a plazo con modelos de expectativas racionales, siguiendo la aportación de Modigliani & Sutch (66), en su formulación de la Teoría de Habitat, tales como los de Modigliani & Shiller (73), Shiller (79) y Singleton (80); los supuestos de los primeros sobre las primas implican (Oliva, 84 a, c. 7): $\xi_{h+i,\,h} = \xi_{h+i-1,\,h-1} + v_{h+i,\,h}$, $E(v_{h+i,\,h+1}) = E(v_{h+i,\,h+1} \cdot \xi_{h+i-1,\,h}) = 0$; $i = 2, 3, \ldots s+1$; $h = t, t+1, \ldots$; Shiller (79) y Singleton (80) en sus trabajos sobre la volatilidad de la estructura a plazo, suponen explícitamente: $\xi_{h+i,\,h} = \xi_{h+i-1,\,h-1}$, que, de acuerdo a (67), sólo se puede aceptar como aproximación; en realidad, admitida la variabilidad de las primas por plazo para cada uno de los vencimientos futuros, el trabajo de Shiller y Singleton, encaminado a buscar una explicación a la alta variabilidad del tipo a largo –casi idéntica a la correspondiente al tipo a corto– pierde interés. La variabilidad de la tasa a largo será mayor de lo que se desprende de la media de las tasas a corto más una prima constante asociada al plazo correspondiente; evidentemente, si se supone constante la prima por plazo, el proceso de promediación, inherente en el tipo a largo llevará a que éste tenga una desviación típica menor que el correspondiente tipo a corto; pero la paradoja desaparece si se considera, como se tiene que hacer, que la prima por plazo asociada a cada vencimiento, no es constante, sino que varía período a período, como se desprende de (67) y de los supuestos con que se ha diseñado I_h. Además, en la medida en que es más difícil prever una variable situada en un instante más alejado en el eje tempora –se tiene menos información sobre ella– ello implica que el numerador de (67) aumentará con el plazo al que la prima haga referencia, actuando como factor compensador de la reducción de la variabilidad del tipo a largo que implica el proceso de promediación de tipos a un período, para cada uno de los instantes futuros, a que conducen los modelos de expectativas racionales de la estructura a plazo. Por tanto, a priori, no se puede afirmar nada acerca de la "volatilidad de la tasa a largo" con respecto a los tipos a corto y carece de fundamento todo intento de justificación.

También parece desprenderse de Hicks (46, p. 146-7) que este autor no consideró que las primas por plazo mantuvieran una relación determinada con el nivel de tipos de interés. En este sentido no es aceptable mezclar su nombre con el de keynes, atribuyhendo la hipótesis hicksiana de la estructura a plazo[25] a ambos –como se observa en Modigliani & Sutch (66)–. Hicks adoptó una teoría keynesiana de los mercados de futuros al mercado de bonos, que se puede considerar como un mercado en el que se negocian préstamos a plazo y debido a las similaridades existentes entre los mercados en que se negocian contratos forward y los mercados en que se negocian contratos de futuros (Richard & Sundaresan, 81): "la Normal Backwardation keynesiana" que "mide la cantidad que los 'hedgers' tienen que dar a los especuladores, para persuadirles a tomar las fluctuaciones de precios en cuestión". Y como nota Nelson: "las primas a la liquidez son invariantes con el tiempo, pues representan una 'Normal Backwardation' del mercado a plazo" (Nelson, 72, p. 21). Keynes no elaboró una teoría detallada de la estructura a plazo, aunque concuerda con Hicks (o éste con aquél) en tener sólo en cuenta el riesgo de principal en que se incurre al adquirir una obligación (Keynes, 36, p. 168-9); pero para Keynes la preferencia por la liquidez dependía del tipo de interés (Keynes, 36, p. 201-2); en el mercado de bonos el riesgo variará con el nivel de tipos de interés. Reinterpretando las ideas de Keynes en el contexto de la estructura a plazo, se tendría que concluir que las primas a la liquidez deberían variar en relación inversa al nivel de los tipos de interés –en relación al nivel "seguro" o normal–: si no se espera que los tipos aumenten, los individuos, aversos al riesgo, estarían dispuestos a invertir a largo, sin solicitar primas de seguro elevadas para ello, pues considerarán altamente improbable la pérdida del principal –el riesgo de principal será bajo, si los tipos son altos, en relación al nivel "seguro" o normal–; pero si se espera que los tipos aumenten, los sujetos aversos al riesgo solicitarán primas elevadas para invertir a largo, que les compensen del alto riesgo en que incurren. Van Horne (78, p. 88) concuerda con las ideas keynesianas, pero Kessel "no está de acuerdo en la dirección del efecto" (Nelso, 72, p. 33-4); para Kessel los títulos proporcionan un rendimiento y servicios como sus-

25. Ver Oliva (84a, c. 7) para una revisión crítica de las distintas teorías de la estructura a plazo.

titutivos del dinero: el diferencial entre los tipos sobre títulos a corto y a largo, refleja su valor relativo como sustitutivos del dinero: un aumento de los tipos de interés, aumenta el coste de oportunidad de mantener el dinero y sus sustitutivos, los bonos a corto; luego implicará un incremento del coste de oportunidad de mantener títulos a corto en relación a mantenerlos a largo: el diferencial entre los bonos a largo y a corto debe aumentar con el nivel de tipos de interés –lo que parece confirmar la evidencia empírica (Nelson, 72, p. 34)–.

Pero, en definitiva, sea cual sea el sentido de la relación entre primas por plazo y tipos de interés, las primeras serán función de los segundos, y ello aparece de forma patente en (67), aún más, el términc de covarianza del numerador y el supuesto de estacionariedad de los tipos sobre cada plazo, en cierto sentido explicita la intuición original de Keynes de desviación respecto a un nivel normal.

Por otra parte, la función de utilidad intertemporal que hemos postulado para los consumidores de nuestra economía simple, implica que éstos tenderán a suavizar la secuencia de flujos de consumo a lo largo de su vida. La introducción de un MS les brinda la posibilidad de alterar su consumo hacia la senda deseada cada período y tal contingencia es conocida por los sujetos. De (59), podemos confirmar:

2. La utilidad marginal del consumo seguirá una martingala con salto $w_{h+1,\,h}/a$, martingala pura, submartingala o supermartingala, según que el cociente citado –positivo– sea $=, \geqslant, \leqslant, 1$:

$$(68) \quad E_h(U'_{h+1}) = (w_{h+1,\,h}/a) \cdot U'_h \qquad h = t, t+1, \ldots$$

Notemos, seguidamente, que hemos introducido la simplificación de suponer un sistema de consumidores idénticos. Entonces, si el consumo agregado en h+1 es más bajo que lo esperado en h, como los tipos de interés son tasas marginales de sustitución de consumo presente por consumo futuro, ello implica que en h + 1 los tipos de interés serán más altos que lo esperado en h, pues los consumidores querrán aumentar el consumo en h + 1 hacia el nivel deseado, a cambio de reducir el consumo en fechas posteriores –en h+1 la demanda de préstamos será mayor, presionando al alza los tipos: se verificará un movimiento al alza de los tipos de interés, tanto a un período, entre h+1 y h+2, como a los sucesivos plazos, de nuevo, por el deseo de los consumidores de suavizar la secuencia de flujos de consumo a lo largo de su existencia –el movimiento al alza se observará en toda la estructura a plazo–, en definitiva:

(69) $$\mathrm{Cov}_h(r_{h+2,\,h+1}, c_{h+1}) < 0$$

Los supuestos con que se ha diseñado la función de utilidad de m sobre cada período, insaciabilidad y aversión al riesgo, implican que el denominador de (67) será estríctamente positivo y que a medida que aumenta el consumo sobre determinado período, la utilidad marginal del consumo para el mismo decrece; en palabras de Breeden (79) "la utilidad marginal del consumo y el consumo presentan correlación negativa"; o sea:

(70) $$E_h(U'_{h+1}) > 0$$

(71) $\mathrm{Cov}(U'_h, c_h) < 0$, por $U'' < 0$; de (69) y (71):

(72) $$\mathrm{Cov}_h(r_{h+2,\,h+1}, U'_{h+1}) > 0$$

Parece razonable admitir, es consistente con nuestros supuestos sobre la función de utilidad de m y la evidencia empírica lo apoya (Hall, 78) que la secuencia de flujos de consumo de un sujeto a lo largo de su vida presenta correlación positiva:

(73) $\mathrm{Cov}(c_{h+1}, c_{h+2}) > 0$; es decir:

(74) $\mathrm{Cov}(U'_{h+1}, U'_{h+2}) > 0$; de (72) y (74):

(75) $\mathrm{Cov}_h(r_{h+2,\,h+1}, U'_{h+2}) > 0$; de (67), (70) y (75):

(76) $\xi_{h+2,\,h} > 0$; y, en general:

(77) $\xi_{h+i,\,h} > 0$; $i = 2, 3, \ldots s+1$.

El resultado anterior también se puede alcanzar si tenemos en cuenta que la primera parte de la argumentación –los consumidores tienen una función de utilidad que les induce a mantener una secuencia de flujos de consumo estables a lo largo de su vida, lo que implicará que el consumo agregado presentará una secuencia estable, que tenderá a su media: m esperará que su consumo futuro aumente si la realización del período corriente está por debajo de la media y viceversa— indica:

(78) $$E_h(U'_{h+i}) \cong E_{h+1}(U'_{h+i}) \cong \ldots \cong E_{h+i-1}(U'_{h+i})$$ [26]

De (60) y (65):

(79) $$\mathrm{Cov}_h(U'_{h+1}/a \,.\, E_{h+1}(U'_{h+2}), U'_{h+2}) \cong \frac{\mathrm{Cov}_h(U'_{h+1}, U'_{h+2})}{a \,.\, E_h(U'_{h+2})} =$$

$$= \quad \text{—por (77)—}$$

$$\xi_{h+2,\,h} = \frac{\mathrm{Cov}_h(U'_{h+1}, U'_{h+2})}{a \,.\, E_h^2\,(U'_{h+2})} > 0, \text{ por (74)}$$

Pero los tipos de interés son tasas marginales esperadas de sustitución entre flujos de consumo en fechas distintas, y, por el carácter de aversos al riesgo que hemos supuesto a nuestros agentes (U(.) se ha definido como función monótona decreciente de la cantidad de consumo disponible en el período), se sigue que la proposición anterior relativa a la correlación de la secuencia de flujos de consumo de un sujeto a lo largo de su vida —si en h c_h está por encima de la media, es más probable que c_{h+1} sea mayor que el valor medio que inferior a él, $\forall h$: el retorno a la esperanza matemática se efectúa de forma gradual—, implica y es implicada por otra proposición acerca de la correlación de los tipos de interés:

(80) $$U'_{h+2} = a \,.\, (1+r_{h+3,\,h+2}) .\ E_{h+2}(U'_{h+3}), \text{ de (55); por (59):}$$

(81) $$U'_h \,.\, w_{h+3,\,h} = a^3 \,.\, E_h(U'_{h+3}) \,; \text{ de (78), (80), (81):}$$

(82) $$U'_{h+2} \cong (1/a) \,.\, U'_h \,.\, w_{h+3,\,h} \,.\, (1+r_{h+3,\,h+2}) \;;\ \text{y en (65):}$$

26. Utilizo el símbolo $\cong$ para significar "aproximadamente igual".

(83) $$\xi_{h+2,\,h} \cong (U'_h \cdot w_{h+3,\,h}/a^2 \cdot E_h(U'_{h+2}))\,.$$

$$\cdot\ \mathrm{Cov}_h(r_{h+2,\,h+1},\, r_{h+3,\,h+2}) > 0.$$

Expresión que da sustento teórico, dentro de un marco optimizador dinámico; a una observación previamente efectuada por Nelson (72, p. 22–5) –apuntó que si los tipos mostraban correlación positiva, el término de covarianza que aparece en la alternativa de sucesivas tenencias de bonos a corto, frente a la de bonos a largo, no se anularía; pero Nelson no tuvo en cuenta que si los agentes tienen en cuenta el término de covarianza es por su carácter de aversos al riesgo–. En definitiva:

3. En una economía de consumidores idénticos, cuyo objetivo es maximizar el funcional de utilidad de la secuencia de flujos de consumo a lo largo de su vida, con el supuesto adicional de que dicha serie presenta autocorrelación positiva, se verificará que, en equilibrio, las primas por plazo existirán para cualquier vencimiento y serán positivas. O alternativamente:

4. Si la serie de tipos de interés a un período presenta autocorrelación positiva, las primas a la liquidez serán positivas. En rendimiento obtenible por la tenencia de un bono a largo, será superior al rendimiento esperado de sucesivas reinversiones de bonos a corto. En la terminología de la literatura de la estructura a plazo, el diferencial "largo–corto" será positiva.

Seguidamente, por la definición de coeficiente de correlación:

(84) $$\xi_{h+i,\,h} = \frac{R_h(r_{h+i,\,h+i-1},\, U'_{h+i}) \cdot \sigma_h(r_{h+i,\,h+i-1}) \cdot \sigma_h(U'_{h+i})}{E_h\ (U'_{h+i})}$$

$i =\ 2, 3,\ ..\ s+1$, y a partir de (67).

Bajo los supuestos con que se ha modelizado el conjunto de información:

(85) $$\sigma_h(r_{h+i-1,\,h+i-2}) < \sigma_h(r_{h+i,\,h+i-1})$$

(85') $${}_h(U'_{h+i-1}) \; < \; \sigma_h(U'_{h+i})$$

La desviación típica condicional será menor para las v.a. que antes tomen valor en el tiempo. Es más fácil predecir las variables que devendrán datos en un momento más cercano. Alternativamente, se posee más información, en términos relativos, acerca de las v.a. que se realizarán en instantes más próximos en el eje temporal.

Por otra parte, los supuestos efectuados acerca de la estacionariedad de la serie de tipos de interés, de la función de utilidad de m y de estar situados en una economía de consumidores idénticos, permiten afirmar que ambas secuencias, las de tipos de interés a un período y las de flujos de consumo, serán estables. Se puede admitir:

(86) $$R_h(r_{h+i-1,\, h+i-2},\, U'_{h+i-1}) \cong R_h(r_{h+i,\, h+i-1},\, U'_{h+i})$$

Luego, de (78), (85), (85') y (86):

(87) $$\xi_{h+i,\, h} > \xi_{h+i-1,\, h}; \quad i = 2, 3, \ldots s+1 \; ; \; h = t,\; t+1, \ldots$$

5. La prima por plazo será una función monótonamente creciente del vencimiento de la obligación asociada. La presencia de tales primas impondría un sesgo positivo a la curva de rendimiento: ésta tendría tendencia a presentar la forma suavemente ascendente que muestra en la mayoría de trabajos empíricos. La curva de rendimiento sólo sería decreciente si las esperanzas matemáticas condicionales de los tipos spot futuros, fueran inferiores a la tasa spot actual sobre un período –tipo a corto spot– en valores que superaran a las primas a la liquidez respectivas.

En síntesis, partiendo de supuestos distintos a los de Hicks –no se postula "debilidad de ningún lado del mercado"– obtengo una conclusión parecida acerca de la estructura de primas; se ha de aceptar la Hipótesis Hicksiana –incluída dentro del conjunto que denomino "Teoría de Habitat de la Estructura a Plazo" (Oliva, 84a, c. 7)–, considerando a las primas por plazo como v.a. antes de devenir realizaciones.

(84) proporciona una explicación de los elementos que intervienen en la determinación de las primas (Oliva, 84a, c.7):

6. Los factores determinantes de las primas son: la variabilidad de

los tipos de interés, tal como ésta es percibida por los sujetos $-\sigma_h(r)-$, la variabilidad de los flujos de consumo futuro, de acuerdo al conjunto de información de que el sujeto dispone en h, I_h, y el grado de aversión al riesgo de los consumidores –medidos ambos factores por $\sigma_h(U')$ – (Oliva, 84a c. 9), el nivel de asociación entre las oscilaciones en la utilidad marginal del consumo y en los tipos de interés $-R_h(r, u')-$, y la esperanza matemática condicional de la utilidad marginal del consumo en el período el cuál la prima se refiere.

La aversión al riesgo juega, por tanto, un papel fundamental en la determinación de las primas por plazo. Podemos ir un paso más allá en la caracterización de los factores determinantes de las primas por plazo si hacemos caso a un consejo de Tobin (69, p. 13): "es muy difícil derivar proposiciones que sean simultáneamente interesantes y generales. . . Para alcanzar proposiciones con contenido significativamente mayor que la prescripción de que el inversor debería maximizar la utilidad esperada, es preciso restringir su función de utilidad o las distribuciones de probabilidad subjetivas. . .". Realizaremos tres bloques alternativos de restricciones adicionales, que limitarán la función de utilidad sobre un período de m y, en un caso, condicionaremos el proceso estocástico $\{c_h\}$ ha ser gaussiano:

(I) $U(c_j) = a_0 + a_1 \cdot c_j - (a_2/2) \cdot c_j^2 \;;\; a_0, a_1, a_2 > 0; j = h + i.$

$H_j > 0; H'_j > 0; L_j > 0; L'_j > 0 \;;\; \sigma_h(U'_j) = a_2 \cdot \sigma_h(c_j)$

(II) $U(c_j) = -e^{-b.c_j} \quad ; \quad b > 0$

$H_j = b \;;\; H'_j = 0; \; L_j = b.c_j \;;\; L'_j > 0$

$\sigma_h(U'_j) = (\mathrm{Var}_h(b.e^{-b.c_j}))^{1/2} = (\text{si } c_j \text{ es normal}) =$

$= e^{-b.c_j + (1/2)\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1), \text{ con } \sigma^2 = \sigma_h^2(c_j)$

(III) $U(c_j) = \ln c_j$

$H_j > 0; \; H'_j < 0; \; L_j = 1 \;;\; L'_j = 0; \; \sigma_h(U'_j) = 1.\sigma_h^2(c_j)$

Para cada una de las funciones de utilidad anteriores, la proposición **6**. alcanza un grado adicional –y distinto en cada caso– de detalle. En el caso de la función de utilidad cuadrática (I) no aparece ningún coeficiente del tipo Arrow–Pratt de aversión al riesgo, absoluta (H_j) o relativa (L_j); en su lugar aparece el factor a_2 incluído en la función de utilidad del agente; en general, se acepta que sólo es admisible como aproximación, para modelizar el comportamiento de un sujeto averso al riesgo ("tiene buenas características matemáticas, pero indeseables propiedades económicas" (Chipman, 73, p. 170)); pero, en un marco intertemporal, es consistente con sujetos que tratan de suavizar la secuencia de flujos de consumo a lo largo de su vida. Para el caso de la función de utilidad exponencial negativa, aparece el coeficiente de aversión absoluta al riesgo (–(U''/U')), así como la varianza del consumo en j, dada la información que m posee en h; tal función describe aceptablemente el comportamiento de un averso al riesgo (Grossman, 76, Hakansson, 70, . . .). La función de utilidad logarítmica (Arrow, 65; Samuelson, 69; Phelps, 62; Hakansson, 70; Nelson, 72) expone que la desviación típica condicional de la utilidad marginal del consumo en j igualará el coeficiente de aversión relativa al riesgo (–(U''. c_j/U')) por la varianza del consumo en j = h+i, dado el conjunto de información disponible en h. En todos los casos se confirma la interpretación de $\sigma_h(U'_{h+i})$.

De otro lado, la representación del tipo forward (66), aceptada la positividad de las primas, tiene la suficiente relevancia como para ser expuesta como proposición:

7. El tipo forward, para un período futuro determinado igualará el tipo esperado a corto para el período citado más la prima por plazo correspondiente.

Entonces, a partir de la definición de tipos forward (18):

$$(88) \qquad (1+r_{h+i,\,h}) = (1+f_{h+i,\,h}) \cdot (1+r_{h+i-1,\,h}) =$$

$$= (1+f_{h+i,\,h}) \cdot (1+f_{h+i-1,\,h}) \cdot\cdot (1+f_{h+2,\,h}) \cdot (1+f_{h+1,\,h})$$

$$\text{con} \quad (1+f_{h+1,\,h}) = (1+r_{h+1,\,h})$$

Utilizando la aproximación –"buena para x pequeño, de que ln (1+x) = x" (Sargent, 79, p. 369)–:

(89)
$$r_{h+i,\,h} = \sum_{j=1}^{i} f_{h+j,\,h} \; .$$

Teniendo en cuenta las derivaciones de las condiciones de optimalidad (66)–(67), a partir de (88)–(89), en términos de rendimiento por período:

(90)
$$\frac{1}{i} \cdot r_{h+i,\,h} = \frac{1}{i} \cdot \left(r_{h+1,\,h} + \sum_{j=2}^{i} E_h(r_{h+j,\,h+j-1}) + \sum_{j=2}^{i} \xi_{h+j,\,h} \right)$$

$$i = \,,2,\,3,\,..\; s+1$$

8. El rendimiento por período asociado a la tenencia de un bono a largo, será igual a la media de los tipos de interés a corto esperados más la media de las primas por plazo correspondientes.

En este punto conviene ser preciso respecto al mecanismo mediante el cuál los agentes generan las expectativas de las variables de interés futuras. $E_h(r_{h+i,\,h+i-1})$ se ha definido como la esperanza matemática de la v.a. $r_{h+i,\,h+i-1}$ condicional a toda la información disponible en h, $I_h \supset I_{h-1}$, $\forall h$, y donde $\{ r_{h+i,\,h+i-1} \}$ era un proceso estocástico covarianza estacionario y gaussiano, y, de aquí, estríctamente estacionario. Entonces $E_h(\,.\,)$ sería el predictor óptimo en h de la v.a. $r_{h+i,\,h+i-1}$ –en el sentido de minimizar el error cuadrático medio de la previsión– y sería lineal en el conjunto de información I_h. Entonces, si el MS es informacionalmente eficiente, de modo que los tipos de interés a un período reflejen, en cada instante, toda la información disponible, el conjunto de información que utilizarán los agentes para pronosticar la serie de tipos de interés futuros a un período, estará constituído por la secuencia de tipos de interés actual y pasados (Sargent, 72):

(91)
$$\left\{ r_{h+1,\,h},\; r_{h,\,h-1},\; \ldots \right\}$$

Pero: "Todas las manipulaciones que se pueden efectuar sobre v.a., pueden ejecutarse también sobre procesos estocásticos" (Nerlove et al., 79, p. 27). Las esperanzas matemáticas condicionales de tipos a un período, basadas en un conjunto de información constituída por la secuencia de tipos de interés sobre bonos a un período en el momento actual y en los instantes pretéritos, son combinaciones lineales de v.a. procedentes de una misma distribución de probabilidad; luego, la serie de esperanzas matemáticas condicionales:

(92) $$\left\{ E_h(r_{h+1,\,h})',\ E_h(r_{h+2,\,h+1}), \ldots E_h(r_{h+s+1,\,h}) \right\}$$

conformarán un conjunto de procesos estocásticos conjuntamente estacionarios. De otro lado, en 3 se ha supuesto que los procesos estocásticos:

$\left\{ r_{h+1,\,h}, r_{h+2,\,h}, \ldots r_{h+s+1,\,h} \right\}$, eran conjuntamente estacionarios. Además, cualquier combinación lineal de un conjunto de procesos estocásticos estacionarios, será un proceso estocástico estacionario:

(93)
$$r_{h+1,\,h}, r_{h+2,\,h}, \ldots r_{h+s+1,\,h}, E_h(r_{h+2,\,h+1}), \ldots E_h(r_{h+s+1,\,h+s}),$$

$$r_{h+1,\,h} + E_h(r_{h+2,\,h+1}), \ldots r_{h+1,\,h} + \sum_{i=2}^{s+1} E_h(r_{h+i,\,h+i-1})$$

conformarán un conjunto de procesos estocásticos estacionarios. Por consiguiente, el conjunto de primas por plazo vigentes en h, combinación lineal de los procesos (93) –a partir de (66), (88) y (89)– conjuntamente estacionarios:

(94) $$\xi_{h+2,\,h}, \xi_{h+3,\,h}, \ldots \sum_{i=2}^{3} \xi_{h+i,\,h}, \ldots \sum_{i=2}^{s+1} \xi_{h+i,\,h}$$

constituirán, a su vez, un conjunto de procesos estocásticos conjuntamente covarianza estacionarios y gaussianos. En este sentido se puede hablar de estabilidad de las primas por plazo para cada uno de los distintos vencimientos. Luego, la función de valor medio y la función de autocovarianzas:

(95) $E(\xi_{h+i,\,h}) = \xi_i$ constante $\forall h$; $i = 2, 3, \ldots s+1.$

$$\text{Cov}\,(\xi_{h\,;\,i,\,h}\,,\,\xi_{h+i-j,\,h-j}) = \begin{cases} \sigma(j, i);\, j \neq 0 \\ \sigma^2_{\xi(i)} \quad , \text{constante } \forall h \end{cases}$$

(95) Brinda ulterior plausibilidad a la hipótesis hicksiana de la estructura a plazo. Por otra parte, conduce, en forma moderada, admitiendo la aleatoriedad de las primas, a uno de los supuestos que subyacen el Preferred Habitat de Modigliani y Sutch –que denomino Variante estacionaria de la Teoría del Habitat (Oliva, 84a, c. 7)– y a las aportaciones posteriores de Modigliani & Shiller (73), Shiller (79) y Singleton (80).

9. Las primas por plazo conformarán un conjunto de procesos estríctamente estacionarios. En la economía de referencia, se puede hablar de estabilidad de las primas para cada uno de los distintos vencimientos en que es admisible la operación de préstamo sin riesgo de falta de pago.

Finalmente, bajo expectativas racionales, determinadas secuencias de v.a. serán martingalas (Shiller, 78, p. 7; Sargent, 72, p. 77); en la economía de referencia, éstas serán cada una de las series de esperanzas matemáticas condicionales (Oliva, 84a, c. 8):

(96)
$$E_h(r_{h+i,\,h+i-1}),\, E_{h+1}(r_{h+i,\,h+i-1}),\, ..\, E_{h+i-1}(r_{h+i,\,h+i-1})$$

$$i = 2, 3, ..\, s + 1$$

Sustituyendo la relación de optimalidad (89) en (121), se obtiene que las siguientes series serán martingalas –y, por consiguiente, verificarán el par de propiedades (Oliva, 84a, c.8) que caracterizan a tales secuencias–:

(97)
$$f_{h+i,\,h} - \xi_{h+i,\,h}\,,\, f_{h+i,\,h+1} - \xi_{h+i,\,h+1}\,, ..$$

$$..\, f_{h+i,\,h+i-2} - \xi_{h+i,\,h+i-2}\,,\quad r_{h+i,\,h+i-1}$$

$$i = 2, 3, ..\, s + 1$$

Y, bajo el supuesto de que el tipo de interés a un período sigue un proceso estocástico covarianza estacionario y gaussiano (Oliva, 84a, c.8), se puede demostrar:

10. Las secuencias de v.a. (96) o (97) no serán tan sólo martingalas, sino random walks.

El modelo se puede contrastar empíricamente; se trata de comprobar que la secuencia (97) sigue un random walk. En este punto enfrentamos uno de los problemas centrales que han padecido los estudios de la estructura a plazo; mientras los tipos forward se pueden obtener directamente de datos de mercado, las primas por plazo no son observables; o por pasiva, no se conocen las expectativas de los agentes de los tipos de interés futuros a un período. Bajo expectativas racionales, el problema se puede solucionar utilizando una variablė "proxi" a la que se asimilan las expectativas de mercado de los tipos de interés sobre bonos sin riesgo. Se persigue ajustar un modelo ARIMA al proceso estocástico $r_{h,\, h-1}$ de los tipos de interés a un período. Se obtendrían previsiones en h–1, para los i períodos siguientes de los tipos a un período:

$$(98) \qquad \hat{r}_{h+i-1,\, h-1}, \; \ldots\ldots\ldots \; \hat{r}_{h+2,\, h-1}, \; \hat{r}_{h+1,\, h-1}$$

Entonces, el error de previsión del tipo de interés para cada plazo, i = 2, 3, . . s + 1, con respecto a las predicciones efectuadas en los períodos subsiguientes para el mismo vencimiento –o a la realización, para $\hat{r}_{h+1,\, h-1}, r_{h+1,\, h}$– debería tener media nula y estar seriamente incorrelacionado.

Alternativamente, se podría restringir la función de utilidad y ajustar (67). Con una función de utilidad cuadrática, aceptable como aproximación local –para pequeñas variaciones del consumo agregado–, (67) se escribirá:[27]

27. En los problemas atemporales, una función de utilidad cuadrática presenta ventajas estríctamente desde la óptica de su tratabilidad matemática y es inaceptable por sus implicaciones económicas (Arrow, 65; Chipman, 73); pero, una vez situados en un marco dinámico, una función de utilidad intertemporalmente aditiva, de modo que la correspondiente a cada período se pueda expresar como una función cuadrática del nivel de consumo asociado, tiene connotaciones económicas interesantes: es consistente con la existencia de sujetos que intentan suavizar la secuencia de flujos de consumo a lo largo de su vida; en suma, deviene una aproximación a la función de utilidad intertemporal de consumidores aversos al riesgo plausible. La tratabilidad matemática de una función de preferencia, aditiva intertemporalmente y cuadrática cada período, es señalada por Chow (75, p. 151): "Cualquier función objetivo es sólo una aproximación a las preferencias del decisor. . . Si la función objetivo propuesta se halla imperfecta, . . lo relevante es si el subsiguiente análisis proporcionará resultados útiles, de otro modo inalcanza-

.../...

(99) $$\xi_{h+i,\,h} = \frac{-a_2 \,.\, \mathrm{Cov}_h\,(C_{h+i},\, r_{h+i,\,h+i-1})}{A_1 - a_2 .\, E_h(C_{h+i})}$$

$C = c\,.\,n,\ \ A_1 = a_1\,.\,n,\ \ a_1, a_2 > 0, i = 2, 3, \ldots s+1;\ h = t, t+1, \ldots$

11. La prima por plazo viene determinada por la covarianza del consumo agregado en h + i con el tipo de interés a un período entre h+i−1 y h+i y por la esperanza matemática del consumo agregado en h+i; todo ello condicional al conjunto de información I_h, vigente en h, momento de efectuar la predicción.

(99) seguirá siendo válido para cualquier subconjunto del conjunto de información I_h. En particular, será correcto utilizando distribuciones incondicionales. En este caso se puede estimar las medias $(\bar{\xi}_i)$ de las primas por plazo para cada vencimiento y compararlas con las que se obtienen a partir de (98) y:

(100) $\hat{\xi}_{h+i,\,h} = f_{h+i,\,h} - \hat{r}_{h+i,\,h}$, sumando para todo h:

(101) $\bar{\xi}_i = \sum_h \tau\, \hat{\xi}_{h+i,\,h}$; h= t, t+1, . . ; i = 2, 3, . . s + 1.

Si el modelo es correcto, ambas medias deberían coincidir. (99) brinda posibilidades adicionales para la estimación de las primas por plazo para los distintos vencimientos, pues los datos de mercado se puede aceptar que constituyen un conjunto común de información de los participantes en el mismo; a partir de aquí se puede pensar en obtener estadísticos que sean condicionales a tales series de observaciones.

7.4. *Teoría pura de expectativas y neutralidad al riesgo.*

La Teoría de Expectativas que aplica a la estructura a plazo de los tipos de interés es la "hipótesis Pura de Expectativas" (Polakoff & Durkin, 81, c. 3). Dice que las primas por plazo $\xi_{h+i,\,h}$, i = 2, 3, . . s+1

. . .\. . .

bles. Una alternativa es complicar la función objetivo matemáticamente. . ., lo que puede dificultar o, incluso, hacer imposible la obtención de una solución óptima para las variables de control. Existirá entonces la elección entre una solución exacta a una formulación aproximada del problema y una solución aproximada a una formulación exacta". Ver Oliva (84a, c. 9).

son nulas. No se debe a un autor concreto, sino que su forma actual es el resultado de las aportaciones realizadas por distintos economistas, en especial de Lutz (41), Hicks (46, c. 11), Williams (38, c.20) y Meiselman (62, c.1). El argumento base de la teoría era que lo que era exactamente cierto bajo certeza, debería ser cierto en promedio bajo incertidumbre.

Bajo certeza el tipo de interés sobre un bono a largo iguala la media geométrica de los tipos a un período, sobre el intervalo temporal apropiado; de otro modo se podrían obtener beneficios sin riesgo mediante el arbitraje. Como bajo certeza los tipos de rendimiento sobre bonos –y demás activos–, sobre intervalos de tiempo análogos, son iguales –aunque los tipos de interés varíen a lo largo del tiempo–, los individuos son indiferentes al vencimiento de los bonos que mantienen –o venden–. Por tanto, la relación entre los rendimientos asociados a bonos con vencimientos distintos carece de interés. Pero, bajo incertidumbre, el problema de la estructura a plazo deviene no trivial, pues el riesgo en que incurre el tenedor de una obligación, depende del vencimiento del bono, en relación al instante en que el obligacionista deja de mantenerlo. El plazo durante el cual un individuo mantiene un determinado título se suele denominar período de tenencia. Se considera inicialmente que el inversor desea transferir u.c. de un período a otro determinado y que al final del período de tenencia deseado, el consumidor liquida la inversión, convirtiéndola en consumo. Entonces, la Hipótesis Pura de las Expectativas –HEP– predice que el rendimiento esperado por un inversor, para un período de tenencia determinado, es el mismo, cualquiera que sea la alternativa de inversión escogida de entre las que tiene disponibles.

Los formuladores de la Hipótesis fueron conscientes de que, bajo incertidumbre, la futura tasa spot era una v.a. Entonces los tipos de interés futuros implícitos en la estructura a plazo en un momento determinado –los tipos forward– serían, según la HEP, iguales a la esperanza matemática, condicional a la información disponible en el momento en que se realiza la inversión, de los tipos spot que regirán en los período futuros correspondientes. Sargent (72) y Roll (70), utilizando un resultado de Samuelson (65), mostraron que la HEP implicaba –y era implicada por– que la secuencia de tipos forward para préstamos a un período sobre un plazo concreto, seguiría una martingala:

(102) $f_{h+i,\, h},\, f_{h+i,\, h+1},\, \ldots\, f_{h+i,\, h+i-2},\, r_{h+i,\, h+i-1}$, se comportaría según el modelo de Martingala. Se tiene que comparar tal predicción de la HEP con las secuencias que serán martingalas en nuestra economía simple, (96) o (97), y observar que la divergencia viene motivada

por las primas por plazo, que en la economía de referencia serán positivas para todos los vencimientos i = 2, 3 . . s + 1.

(102) proporciona una definición alternativa de la HEP: esta teoría se caracteriza por la propiedad de que los tipos forward para bonos a un período, con vencimiento en una fecha determinada, h + i, implícitos en las distintas estructuras a plazo vigentes entre h y h + i–1 siguen una martingala.

La interpretación más amplia de la HEP –para alternativas: Cox et al. (81)– lleva a la conclusión de que el equilibrio se caracterizaría por la igualdad de rendimientos esperados, para todas las estrategias factibles de inversión en bonos sin riesgo y para todos los períodos de tenencia posibles. Es fácil probar que ello no puede ser válido en general. Requiere que el rendimiento esperado sobre un bono con vencimiento en h + 2, sobre el período que transcurre entre h y h + 1 sea igual al rendimiento cierto asociado a un bono con vencimiento en h + 1:

$$(1+r_{h+1,h}) = (1+r_{h+2,h}) \cdot E_h(w_{h+2,h+1}) =$$

$$= (1+r_{h+1,h}) \cdot (1+f_{h+2,h}) \cdot E_h(w_{h+2,h+1})$$

Además, el rendimiento esperado para el plazo h––h + 2 sobre un bono con vencimiento en h + 1, reinvertido a su vencimiento en una obligación con vencimiento en h+2, debe igualar el rendimiento, cierto en h, de un título con vencimiento en h+2:

$$(1+r_{h+2,h}) = (1+r_{h+1,h}) \cdot (1 \cdot f_{h+2,h}) =$$

$$= (1 + r_{h+1,h}) \cdot E_h(1+r_{h+2,h+1})$$

La demostración es inmediata a partir de la desigualdad de Jensen (Parzen, 60, p. 477) (Oliva, 84a, p. 218–9) o a partir de la identidad: $1 = E_h(r \cdot r^{-1}) = E_h(r) \cdot E_h(r^{-1}) + Cov_h(r, r^{-1})$, por la definición de covarianza, teniendo en cuenta que $Cov_h(r,r^{-1})$ es siempre negativa, si $r \in R^+$ y tiene una distribución no degenerada.

En la economía de referencia, como he apuntado, la HEP, sólo se verificaría si las primas por plazo fueran nulas para todo vencimiento y, a partir de (67), ello requiere:

i) tipos de interés no estocásticos: es el caso clásico de certeza, donde la HEP se cumple de forma exacta; queda excluído en un modelo que los supone aleatorios.

ii) consumo no estocástico: se ha supuesto que era una v.a. cada período.

iii) consumo y tipos de interés no correlacionados: insostenible en una economía de consumidores idénticos.

iv) indivíduos neutrales al riesgo: se han supuesto aversos al riesgo.

"Muchos analistas, tales como Meiselman (62), Malkiel y Bierwag & Grove fueron conscientes de la conexión entre neutralidad al riesgo y la HEP. . " En un modelo multiperíodo con un solo bien de consumo "la definición apropiada de neutralidad al riesgo es que la utilidad depende linealmente del consumo en cada fecha. . ., pues los individuos con tales funciones de utilidad serán indiferentes entre recibir una lotería y la esperanza de dicha lotería." (Leroy, 82, p. 195-8). Pero, para consumidores neutrales al riesgo, la función de utilidad no es cóncava, por lo que no se garantiza una solución interior a nuestro modelo general. El problema se puede solucionar, imponiendo una solución interior (Cox et al., 81, p. 781) o excluyendo las actividades productivas del modelo, de forma que éste se convierta en uno de cambio puro (Leroy, 82, p. 198). Bajo neutralidad al riesgo, la función de utilidad de m se convertirá en:

$$(103) \qquad \ddot{U}(c) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k . b . c_{t+k} \quad ; \qquad a \epsilon (0, 1)$$

y las condiciones de optimalidad (59):

$$(104) \qquad b . w_{h+i,\, h} = a^i . b \qquad ó$$

$$(105) \qquad r_{h+i,\, h} = (1/a^i)-1 \quad ; \quad i = 1, 2, . . s + 1. \quad \text{de (105):}$$

a) los tipos de interés futuros devienen no aleatorios por "la identidad entre los tipos de interés y las tasas marginales de descuento y al hecho de que éstas últimas son no estocásticas si la función de utilidad es lineal" (Leroy, 82, p. 198), bajo el supuesto de que el equilibrio siempre se alcanza.

b) Evidentemente, la no existencia de incertidumbre acerca de los tipos de interés futuros, implica que se obtiene la HEP. Todo bono deviene una inversión sin riesgo, tanto a su vencimiento como en períodos previos al mismo. Sólo la ausencia de incertidumbre sobre los tipos de interés futuros es compatible con una economía de indivíuos neutrales al riesgo.

Bajo el supuesto de tasa constante de preferencia a temporal:

c) la curva de rendimiento es plana.

d) el tipo de rendimiento para cualquier plazo es estríctamente positivo –pues, por hipótesis, a ϵ (0,1)–.

Finalmente, se ha de mencionar que la HEP, aplicación directa de los resultados obtenidos bajo certeza a un mundo de incertidumbre, basa su justificación en el supuesto de que el Mercado de Bonos está dominado por especuladores neutrales al riesgo –"que tienen poder suficiente para originar que los tipos de interés de mercado se determinen exclusivamente en base a su esperanza matemática" (Meiselman, 62, p. 10)–. El enfoque es simplista y altamente cuestionable: los mercados financieros están dominados por entidades, cuyo comportamiento difícilmente concuerda con el preconizado por la HEP (Oliva, 84a, c. 8).

7.5. *El mercado de capitales.*

Resolviendo el sistema constituído por (54) y (56):

$$(1-aB^{-1}) \,.\, E_h(U'_h \,.\, p^j_h) = a \,.\, B^{-1} \,.\, E_h(U'_h \,.\, d^j_h) \quad ; \quad \text{luego:}$$

$$U'_h \,.\, p^j_h = ((a.B^{-1}) / (1-a.B^{-1})) \,.\, E_h(U'_h \,.\, d^j_h) \quad ; \text{ y:}$$

(106)
$$p^j_h = (1/U'_h) \,.\, E_h \sum_{i=1}^{\infty} a^i \,.\, (U'_{h+i} \,.\, d^j_{h+i}) \; ; \; h = t, \; t+1 \; ..; j = 1, \,.\, J$$

(106) es la función de demanda inversa para las acciones de la empresa j, y se tiene que comparar con la obtenida por Samuelson (65) para un "Mercado eficiente":

(106')
$$p^j_h = \sum_{i=1}^{\infty} (1/(1+v_j)^i) \;.\; E_h(d^j_{h+i}) \quad ; \; v_j \text{ exógeno.}$$

Es decir, bajo aversión al riesgo, "el tipo de interés" a que se descuenta la secuencia de dividendos esperados, no "es independiente de la realización de las variables condicionantes". Mientras en el Modelo de Martingala el factor que pondera los dividendos esperados es un dato en h, en la economía de referencia, en la medida en que flujos de consumo son estocásticos, también lo serán las utilidades marginales y, por tanto, las ponderaciones a aplicar a la secuencia de dividendos esperados. La conexión apuntada entre neutralidad al riesgo y el Modelo de Martingala se hace patente si se observa que si se postula esta conducta para los agentes, se obtiene el Modelo de Samuelson de "Mercados Competitivos". El caso es análogo al de la HEP para el Mercado de Bonos. Para sujetos neutrales al riesgo, la función de utilidad apropiada es la dada en (103). Para la resolución del problema, como consideramos la existencia de actividades productivas en el modelo, el óptimo interior se tiene que imponer y se obtiene:

$$(107) \quad a^k \,.\, b \,.\, p_h^j = ((a \,.\, B^{-1}) / (1-a \,.\, B^{-1})) \,.\, E_h(a^k \,.\, b \,.\, d_h^j),$$

y de (106') y (107):

$$(108) \qquad a^i = 1/(1+v_j)^i$$

Los tipos de rendimiento esperados coinciden con los de preferencia temporal, análogamente con el caso de certeza. Ello también contradice otro de nuestros supuestos de partida: las v_j diferían entre las empresas del conjunto J. Es decir, bajo neutralidad al riesgo, todas las actividades productivas del sistema tendrían que originar el mismo tipo de rendimiento esperado; de otro modo no sería posible su existencia. Si $v_j < (1/a)-1$ no invertirán en esa empresa; si ello se cumple $\forall j$, desaparecerán las actividades productivas del sistema. Si existe algún $v_j > (1/a)-1$, m invertirá todo su patrimonio en esa empresa, reduciendo su consumo a 0 –"bajo neutralidad al riesgo los sujetos tienen elasticidad de sustitución infinita entre flujos de consumo en fechas distintas" (Leroy, 82, p. 200)–. Se tienen que considerar tres casos: (a) que los inversores no consuman actualmente; (b) que consuman a una tasa infinita agotando por completo su riqueza, . . ; (c) que consuman a una tasa finita" (Cox et al., 81, p. 781). Sólo (c) se ha analizado. "Se obtiene una solución de esquina" (Leroy, 82, p. 202). Adecuar el modelo al caso de neutralidad al riesgo supone alterar casi todos los supuestos de partida; no es el propósito para el cuál ha sido elaborado.

Por otra parte, en general, bajo aversión al riesgo, el resultado de Martingala no se alcanzará, a menos que se impongan restricciones adicionales en el sistema (Ohlson, 77, para un ejemplo de este caso).

(55) se puede escribir:

$$(109) \qquad U'_h = a \,.\, E_h(U'_{h+1} \,.\, (1+r^a_{h+1})) \; ; \qquad h = t, \quad t+1, \ldots,$$

teniendo en cuenta que M poseerá la Cartera de Mercado cada período, en equilibrio, iguala la tasa marginal de sustitución de consumo actual por consumo futuro a la tasa de transformación de mercado en términos del rendimiento sobre la Cartera de Mercado. Proviene –de acuerdo a la definición de Cartera de Mercado– de la combinación lineal de J ecuaciones de Euler estocásticas.

(55) es similar a la ecuación de Euler estocástica utilizada por Lucas en el marco de una economía de cambio puro (Lucas, 78, p. 1.443), para mostrar que precios de activos ajustados por dividendos difícilmente tendrán la propiedad de martingala; variaciones en el consumo período a período y la presencia del factor de preferencia temporal lo impedirán.

Aquí, mediante una demostración alternativa, podemos ir un paso más allá, gracias a la introducción de un Mercado de Bonos. Por la definición de covarianza de dos v.a.:

$$(110) \quad U'_h/a = E_h(U'_{h+1}) \cdot E_h(1+r^a_{h+1}) + Cov_h(U'_{h+1}, r^a_{h\ \ 1})$$

$$(111) \quad (1/w_{h+1,h}) - \frac{Cov_h(U'_{h+1}, r^a_{h+1})}{E_h(U'_{h+1})} = E_h(1+r^a_{h+1}) \neq$$

(111')

$\neq \; E_h(1+\bar{r}^a_{h+1}) = 1 + v_a$, restricción de rendimiento que verifica la martingala asociada a la Cartera de Mercado de un "Mercado Eficiente". Si los segundos miembros de (111) y (111') fueran iguales, ello conduciría a que el primer miembro de (111), contra lo supuesto, fuera constante $\forall h$.

12. Precios ajustados por dividendos de las acciones que se negocian en la economía de referencia no tendrán la propiedad de martingala. El Mercado de Capitales no será un "Mercado Eficiente". De otro modo, el Mercado de Capitales será informacionalmente eficiente –los agentes tendrán expectativas racionales al procesar la información– pero precios, ajustados por dividendos de acciones serán, en cierta medida, predecibles.

13. $\left\{ r^j_h \right\}$ y $\left\{ r^a_h \right\}$ serán procesos estocásticos estríctamente estacionarios, pero no de ruido blanco.

De (55) por las propiedades de las esperanzas matemáticas condicionales:

(112) $$U'_h = a^i(E_h(U'_{h+i} \cdot (1+r^j_{h+1}) \ldots (1 + r^j_{h+i}))), \ j \in J, \ \forall i.$$

14. El consumidor en el óptimo en h, dado I_h, ha de ser indiferente entre un incremento de su consumo en h, o invertir el incremento marginal de sus recursos por cualesquiera número de períodos adicionales y en cualesquiera de las alternativas que le ofrece el Mercado de Capitales en los sucesivos períodos, incrementando su consumo en el período en que cese en su estrategia inversora con los fondos resultantes de aquella. (112) iguala la utilidad marginal del consumo con la utilidad marginal indirecta de la riqueza.

7.6. *El CCAPM.*

De la interrelación de dos ecuaciones de Euler estocásticas, se obtienen las dos expresiones que adopta, en la economía de referencia, el Consumo–Capital Assets Pricing Model, instrumento analítico económico–financiero, para la valoración de flujos de ingresos inciertos y que es consistente con un comportamiento averso al riesgo de los sujetos, en un entorno caracterizado por la aleatoridad intertemporal del conjunto de oportunidades que les brindan los distintos mercados en que es factible su actuación cada período (Breeden, 79; Grossman & Shiller, 81; Beja, 71).

(113) $$E_h(r^j_{h+1}) - r_{h+1,h} = - \frac{Cov_h(U'_{h+1}, r^j_{h+1})}{E_h(U'_{h+1})}$$

15. La prima por riesgo de falta de pago asociada a determinada acción, dependerá de la covarianza condicional de su rendimiento con la utilidad marginal del consumo y de la esperanza matemática condicional de esta última, dado el conjunto de información de que el sujeto dispone en el instante de estructurar su cartera, I_h.

Tal prima puede ser positiva o negativa. Si el término de covarianza es positivo, la acción j promete un pago –previsto– alto, cuando el consumo, tal como anticipado en h es relativamente bajo: la prima será negativa; la acción j, a diferencia de un título sin riesgo de falta de pago sobre idéntico plazo, proporciona un seguro acerca de variaciones estocásticas en los flujos de consumo. Si el término de covarianza es negativo, la acción j promete un pago bajo cuando el consumo es bajo; el sujeto sólo tomará el riesgo que comporta tal estrategia, si lleva asociada una prima positiva.

$$(114) \qquad E_h\left(r_{h+1}^{j(1)} - r_{h+1}^{j(2)}\right) = - \frac{\mathrm{Cov}_h\left(U'_{h+1}, r_{h+1}^{j(1)} - r_{h+1}^{j(2)}\right)}{E_h\left(U'_{h+1}\right)}$$

16. La covarianza condicional del diferencial de rendimientos entre dos acciones con la utilidad marginal del consumo en el período en que los títulos prometen pagos, es la medida del riesgo relevante para preciar tales activos.

Restringiendo la función de utilidad del consumidor representativo —v.g., si se supone que la utilidad marginal del consumo es función lineal de su argumento, lo cuál es aceptable como aproximación, para pequeñas variaciones del consumo agregado período a período—, se obtienen expresiones contrastables empíricamente.

17. Todas las conclusiones anteriores seguirán siendo válidas incluso ante la presencia, cada período, de activos no negociables o imperfectamente negociables en el patrimonio del consumidor representativo: el término y_h, h = t, t=1, . . . , que está presente en la restricción presupuestaria que enfrenta m cada período, no aparece en las condiciones de optimalidad.

REFERENCIAS

1. ALCHIAN, A., 74. Information, martingales and prices. Swedish journal of economics, march.
2. ARROW, K., 65. Essays on the theory of risk bearing. North–Holland.
3. ALLEN, B., 81. Generic existence of completely revealing equilibria for economies with uncertainty when prices convey information. Econometrica, 49, p. 1173–99.
4. AZARIADIS, C., 75. Implicit contracts and unemployement equilibria. Journal of Political Economy.
5. BARRO, R., 76, Rational expectations and the role of Monetary Policy, Journal of Monetary Economics.
6. BEJA, A., 71. The structure of cost of capital under uncertainty. Review of Economic Studies, july.
7. BENSOUSSAN ET AL., 74. Management applications of Modern Control Theory. North–Holland.
8. BERTSEKAS, D., 76. Dynamic programming and stochastic Control. Academic Press.
9. BIERWAG y GROVE, 67. A model of the term structure of interest rates. Review of Economics and Statistics, february.
10. BRAY, M., 81. Futures trading, rational expectations and the efficient market hypothesis. Econometrica. 49, n. 3.
11. BREEDEN, D., 79. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. Journal of Financial Economics, september.
12. CHIPMAN, J., 73. The ordering of portfolios in terms of mean and variance. Review of Economic Studies, may.
13. CHOW, G., 75. Analysis and control of dynamic economic systems. Wiley.
14. CHOW, G., 81. Econometric Analysis by control methods. Wiley.
15. COOTNER, P., 64. The random character of stokc market prices. MIT PRESS.
16. CO et AL., 81. A re-examination of the traditional hypothesis about the term structure of interest rates. JF, september.
17. CULBERTSON, J., 57. The term structure of interest rates. Quarterly journal of Economics, november.
18. DANTHINE, JP., 77. Martingales, market efficiency and commodity prices. European Economic Review, 10.
19. DIAMOND y VERRECHIA, 81. Information aggregation in a noisy rational expectations economy. Journal of Financial Economics, 9.
20. FAMA, E., 63. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. Journal of Business, 36.
21. FAMA, E. 70. Efficient Capital Markets: a review of theory and empirical work. Journal of Finance, 25.
22. FAMA, E., 75. Short.term interest rates as predictors of inflation. American Economic Review, 65.
23. FAMA, E., 76. Foundations of Finance. Basic Books.
24. FAMA y MILLER, 72. The Theory of Finance. Holt, Rinehart and Winston.
25. FAMA y ROLL, 68. Some properties of symmetric stable distributions. J. Amer. Stat. Assoc., 66.
26. FELLER, W., 71. Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. Limusa Wiley, 78.

27. FIXHER, I., 30. The theory of Interest. August Mc Kelly.
28. Friedman, B., 79. Optimal expetations and the extreme information assumptions of "rational expectations" macromodels. Journal of Monetary Economics, 5.
29. FUTIA, C., 81. Rational Expectations in linear models. Econometrica, 49.
30. GOURIEUX ET AL., 82. Rational Expectations in dynamic linear models; analysis of the solutions. Econometrica, 50.
31. GRANGER, C., 72. Empirical studies of capital markets: a survey. En Szego y Shell, 72.
32. GRANGER y NEWBOLD, 77. Forecasting Economic Time Series. Academic Press.
33. GROSSMAN, S., 76. On the efficiency of competitive stock markets where traders have diverse information. JF, 31, n. 2.
34. GROSSMAN, S., 77. The existence of futures markets, noisy rational expectations and informational externalities. Review of Economic Studies. 44.
35. GROSSMAN, S., 78. Further results on the informational efficiency of competitive stock markets, Journal of Economic Theory, 18.
36. GROSSMAN y SHILLER, 82. Consumption correlatedness and risk measurement in economies with non-traded assets and heterogeneus information. Journal of Financial Economics, 10.
37. GROSSMAN y STIGLITZ, 76. Information and competitive price systems. American Economic Review, 66.
38. GROSSMAN y STIGLITZ, 80. The impossibility of informationally efficient markets. American Economic Review, 70.
39. HAHN, F., 70. Savings under uncertainty. Review of Economic Studies, january.
40. HAKANSSON, N., 70. Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions. Econometrica, 38.
41. HALL, R., 78. Stochastic implications of the Life cycle–Permanent income Hypothesis: Theory and evidence. Journal of Political Economy, 86, n. 6.
42. HENNING ET AL., 81. Financial Markets and the economy. Prentice-Hall.
43. HICKS, JR., 46. Value and Capital. Oxford.
44. HIRSHLEIFER, J., 70. Investment, interest and Capital. Prentice-Hall.
45. HIRSHLEIFER y RILEY, 79. The analysis of uncertainty and information. An expository survey. Journal of economic Literature, 17, December.
46. INTRILIGATOR, M., 71. Optimización matemática y teoría económica. Prentice–Hall Internacional, 73.
47. JENSEN, M., ed., 72. Studies in the theory of Capital Markets. Praeger.
48. KAMIEN y SCHWARTZ, 81. Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in ecnomics and management. North–Holland.
49. KARLIN y TAYLOR, 75. A first course in stochastic procesess. Academic Press.
50. KENDALL, M., 76. Time-Series. Griffin.
51. KEYNES, JM., 36. The General Theory of employement, interest and money. Harcourt Brace.
52. KOOPMANS, T., 80. Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica y la conferencia del Nobel. Bosch.
53. Langetieg, T. A multivariate model of the term structure of interest rates. Journal of Finance, march.
54. LEROY, S., 73. Risk aversion and the martingale property of stock prices. International Economic Review, 14.

55. LEROY, S., 82. Expectations models of assets prices: a survey of theory. Journal of Finance, 37, n. 1.
56. LEVHARI y SRINIVASAN, 69. Optimal savins under uncertainty. Review of Economic Studies, april.
57. LONG, J., 72. Consumption-investment decisions and equilibrium in the securities market. En Jensen, ed. 72.
58. LONG, J., 74. Stock prices, inflation and the term structure of interest rates. Journal of Financial Economics. July.
59. LUCAS, R., 72. Expectations and the neutrality of money. Journal of Economic Theory, april.
60. LUCAS, R., 78. Assets prices in an excahnge economy. Econometrica, november.
61. LUCAS y SARGENT, 81. Rational Expectations. Allen & Urbin.
62. LUTZ, F., 41. The structure of interest rates. Quarterly journal of Economics, p. 36-63.
63. MALLIARIS Y BROCK, 82. Stochastic methods in Economics and Finance. North–Holland.
64. MEISELMAN, D., 62. The term structure of interest rates. Prentice-Hall.
65. MERTON, R., 71. Optimun consumption and portfolio rules in a continuos–time model. Journal of Economic Theory, 3.
66. MERTON, R., 73. An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica, september.
67. MERTON, R., 82. On the mathematics and economics assumptions of continuous–time models. En Sharpe y Cootner, eds., 82.
68. MODIGLIANI y SUTCH, 66. Innovations in interest race policy. American Economic Review, may.
69. MODIGLIANI y SHILLER, 73. Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates. Economica, february.
70. NELSON, CR., 72. The term structure of interest rates. Basic books.
71. NERLOVE et AL., 79. Analysis of economic time-series: A syntesis. Academic Press.
72. O'FLYNN, M. 82. Probabilities, random variables and stochastic procesess. Harper and Row.
73. OHLSON, J., 77. Risk aversion and the martingale property of stock prices: comment. International Economic Review, 18, february.
74. OLIVA, M., 84a. Un Ensayo de Teoría Financiera: Reformulación en términos de procesos estocásticos de parámetro discreto. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona.
75. OLIVA, M., 84 b. La teoría de la Cartera, la toma de decisiones y la moderna Teoría Financiera. Cuadernos de Economía, 32.
76. OSBORNE, M., 59. Brownian motion in the sotck Market. Operations Research, 7.
77. PHELPS, ES., 62. The acumulation of risky capital: a sequential utility analysis. Econometrica, 30, october.
78. POLAKOFF y DURKIN, 81. Financial Institutions and Markets. Houghton Mifflin.
79. PRATT, J., 64. Risk aversion in the small and in the large. Econometrica, 32.
80. PRESCOTT y MEHRA, 80. Recursive competitive equilibrium: the case of homogeneus households. Econometrica, 6.
81. PRIESTLEY, MB., 81. Spectral analysis and time series. Academic Press.
82. RADNER, R., 72. Existence of equilibrium of plans, prices and price expecta-

tions in a sequence of markets. Econometrica, 40.
83. RADNER, R., 79. Rational expectations equilibrium: generic existence and the information revealed by prices. Econometrica, 47.
84. RICHARD y SUNDARESAN, 81. A continuous time model of forward prices and futures prices in a multigood economy. Journal of Financial Economics.
85. ROLL, R., 70. The behavior of interest rates. Basic books.
86. RUBINSTEIN, M., 75. Securities market efficiency in a Arrow-Debreu Economy. American Economic Review, december.
87. RUBINSTEIN, M., 76a. The strong case for the generalized logaritmic utility model as the premier model of Financial Markets. Journal of Finance, may.
88. RUBINSTEIN, M., 76b. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. The bell journal of economics, 7, autumn.
89. SAMUELSON, PA., 65. Proof that rpoperly anticipated prices fluctuate randomly. Industrial management review, 6.
90. SAMUELSON, PA., 69. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. Review of Economics and Statistics, 51.
91. SARGENT, T., 72. Rational expectations and the term structure of interest rates. Journal of money, credit and banking, 4, n. 1.
92. SARGENT, T., 79. Macroeconomic Theory Academic Press.
93. SHARPE y COOTNER, eds., 82. Essays in honor of Paul Cootner. Prentice-Hall.
94. SHILLER, R., 78. Rational Expectations and the dynamic structure of Macroeconomic Models: A critical review. Journal of Monetary Economics, 4.
95. SHILLER, R., 79. The volatility of long term interest rates and expectations models of the term structure. Journal of Political Economy, 87, n. 6.
96. SINGLETON, K., 80. Expectations models and implied variance bounds. Journal of Political Economy, 88, n. 6.
97. STIGLITZ, J., 82. Information and Capital Markets. En Sharpe y Cootner, eds.
98. SZEGO y SHELL, eds., 72. Mathematical methods in investment and Finance. North-Holland.
99. TELSER, LG., 67. A critique of some recent empirical research on the explanation of the term structure of interest rates. Journal of Political Economy, 75, n. 4.
100. THOMAS, J., 71. Applied probability and random procesess. Krieger.
101. TOBIN, J., 58. Liquidity prefeence as behavior toward risk, Review of Economic Studies, 26.
102. TOBIN, J., 69. Comment on Borch and Feldstein. Review of Economic Studies, january.
103. VACISEK, O., 77. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5. november.
104. VAN HORNE, JC., 78. Financial markets, rates and Flows. Prentice-Hall.
105. VERRECHIA, R., 80. Consensus beliefs, information adquisition and market efficiency. American Economic Review, 70, december.
106. WILLIAMS, JB., 38. The theory of investment value. North-Holland.
107. YAARI, M., 65. Uncertain lifetime, life insurance and the theory of consumer. Review of Economics and Statistics, april.
108. ZIEMBA y VICKSON, eds., 75. Stochastic optimization models in Finance. Academic Press.